Mathematik in der Natur

Fibonacci und die Ananas

Jan Schneider

Hommage an das Oberfeld
Atelierhaus Vahle

February 25, 2017

Fibonacci-Folge

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Divina Proportione

$$\phi = 0,618\ldots$$

Leonardo da Pisa

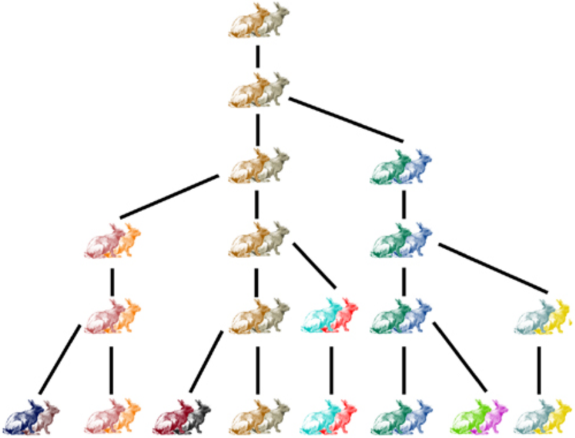
- * etwa 1170; † etwa 1250

Liber Abaci

- “Buch des Rechnens”

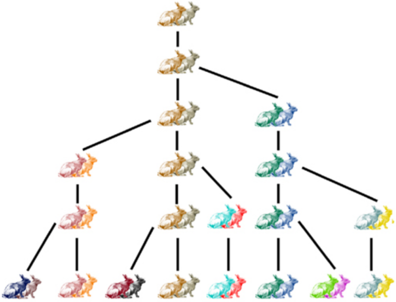
Fibonacci's Kaninchen

- Wie viele Nachfahren hat ein Kaninchenpaar nach einem Jahr?
- Stilisierte Annahmen:
  - Ein Kaninchenpaar bringt pro Monat ein weiteres Paar zur Welt
  - Ein Kaninchen wird nach einem Monat geschlechtsreif



Fibonacci-Folge

- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_3 = 1 + 1 = 2$
- $F_4 = 2 + 1 = 3$
- $F_5 = 3 + 2 = 5$
- $F_6 = 5 + 3 = 8$
- $F_7 = 8 + 5 = 13$



Fibonacci-Folge

Allgemeines Bildungsgesetz

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ für } n = 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$

Waldlilie

Primel

Nelke

Kanadische Blutwurzel

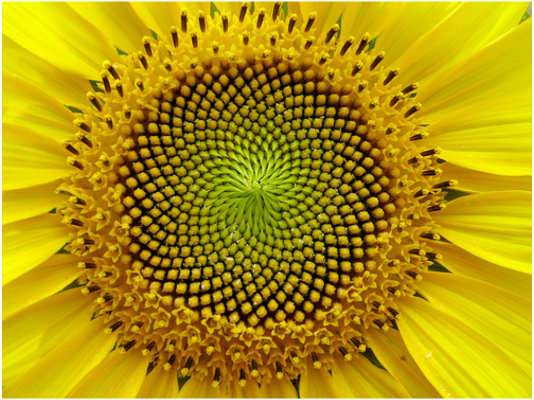
Schwarzäugige Susanne

Gänseblümchen

Aloe Polyphylla

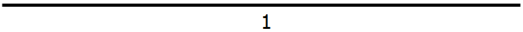
Kiefernzapfen

Sonnenblume



Idee

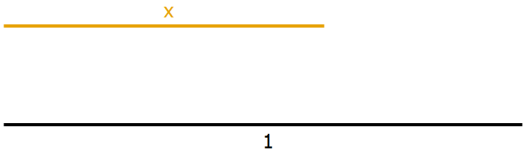
Eine Strecke so zu teilen, dass das Verhältnis des kleineren zum größeren Streckenabschnitts dem Verhältnis des größeren Streckenabschnitts zur Gesamtstrecke gleich ist



Der goldene Schnitt

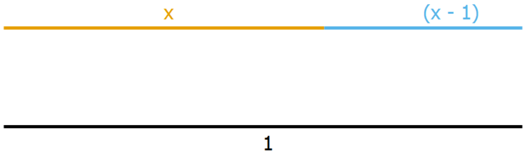
Idee

Eine Strecke so zu teilen, dass das Verhältnis des kleineren zum größeren Streckenabschnitts dem Verhältnis des größeren Streckenabschnitts zur Gesamtstrecke gleich ist



Der goldene Schnitt

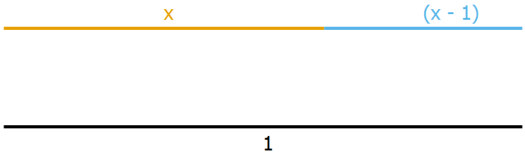
Idee
Eine Strecke so zu teilen, dass das Verhältnis des kleineren zum größeren Streckenabschnitts dem Verhältnis des größeren Streckenabschnitts zur Gesamtstrecke gleich ist



Der goldene Schnitt

Idee

Eine Strecke so zu teilen, dass das Verhältnis des kleineren zum größeren Streckenabschnitts dem Verhältnis des größeren Streckenabschnitts zur Gesamtstrecke gleich ist

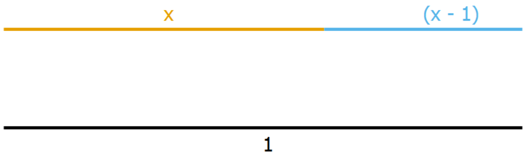


$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

Der goldene Schnitt

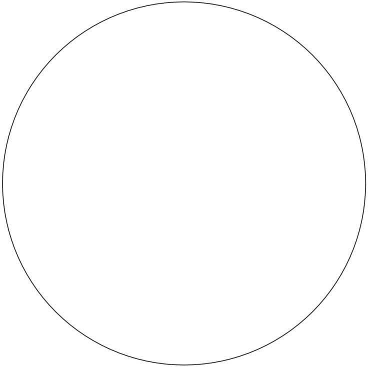
Idee

Eine Strecke so zu teilen, dass das Verhältnis des kleineren zum größeren Streckenabschnitts dem Verhältnis des größeren Streckenabschnitts zur Gesamtstrecke gleich ist

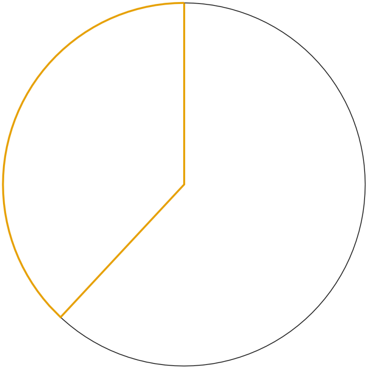


$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339\cdots = 1 + \frac{1}{\phi}$$

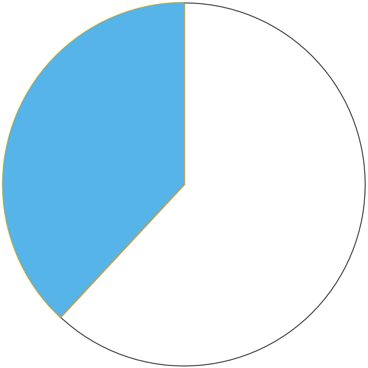
Der goldene Winkel



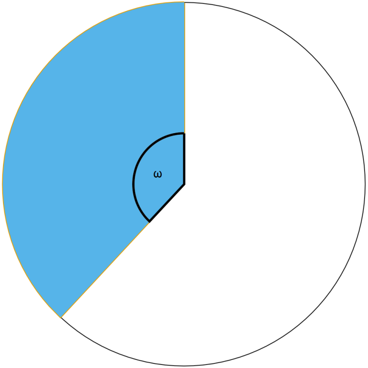
Der goldene Winkel



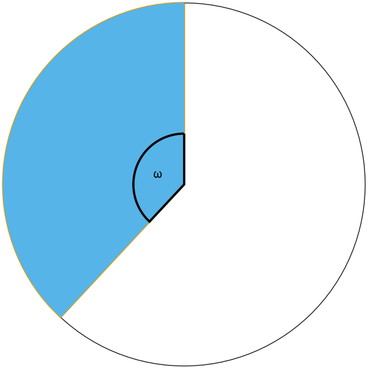
Der goldene Winkel



Der goldene Winkel



Der goldene Winkel



$$\omega = 137,507\ldots^\circ$$

Definition

Eine reelle Zahl a heißt rational, falls es zwei ganze zahlen n und m gibt, so dass gilt

$$a = \frac{n}{m}.$$

Andernfalls heißt a irrational.

Der goldene Schnitt

Definition

Eine reelle Zahl a heißt rational, falls es zwei ganze zahlen n und m gibt, so dass gilt

$$a = \frac{n}{m}.$$

Andernfalls heißt a irrational.

Beispiele sind $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, \phi$.

Der goldene Schnitt

Definition

Eine reelle Zahl a heißt rational, falls es zwei ganze zahlen n und m gibt, so dass gilt

$$a = \frac{n}{m}.$$

Andernfalls heißt a irrational.

Beispiele sind $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, \phi$.

Theorem

ϕ ist die irrationalste aller Zahlen

Reguläre Kettenbrüche

Jede reelle Zahl a lässt sich durch einen regulären Kettenbruch darstellen, das heißt es existiert eine Folge ganzer Zahlen $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ so dass gilt:

$$a = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \dots}}}}$$

Reguläre Kettenbrüche

Jede reelle Zahl a lässt sich durch einen regulären Kettenbruch darstellen, das heißt es existiert eine Folge ganzer Zahlen $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ so dass gilt:

$$a = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche

$$K_1 = a_1$$
$$K_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

Reguläre Kettenbrüche

Jede reelle Zahl a lässt sich durch einen regulären Kettenbruch darstellen, das heißt es existiert eine Folge ganzer Zahlen $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ so dass gilt:

$$a = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche

$$K_1 = a_1$$
$$K_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

Die Näherungsbrüche *konvergieren* gegen a und sind *beste Näherungen* für a

Reguläre Kettenbrüche – Beispiel π

$$\begin{aligned}\pi &= 3{,}14159\ldots \\ &= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{p_1}{q_1} = 3 \\ K_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857} \\ K_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{333}{106} = 3{,}141509\ldots\end{aligned}$$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}$$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}}}$$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche
1,

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche
$1, \quad \frac{2}{1},$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche
1, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$,

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche
$1, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{3},$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche
$1, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{8}{5},$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche
$1,\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Näherungsbrüche

$1,\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},$

Reguläre Kettenbrüche – ϕ

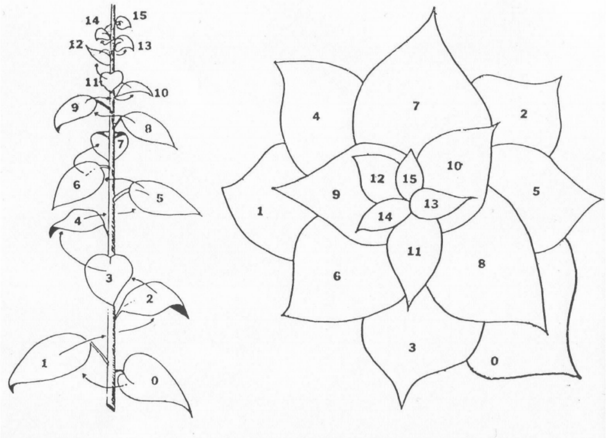
Es gilt

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

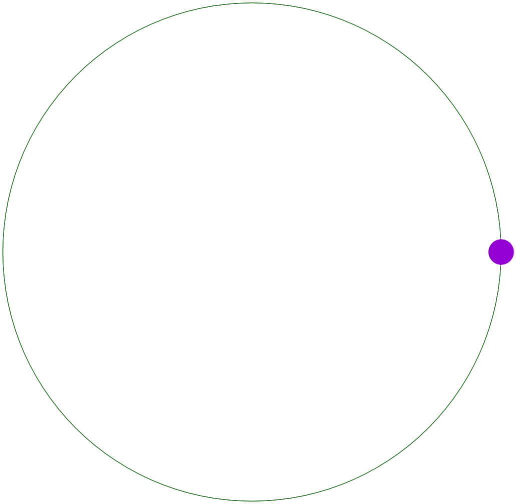
Näherungsbrüche

$1,\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \dots$

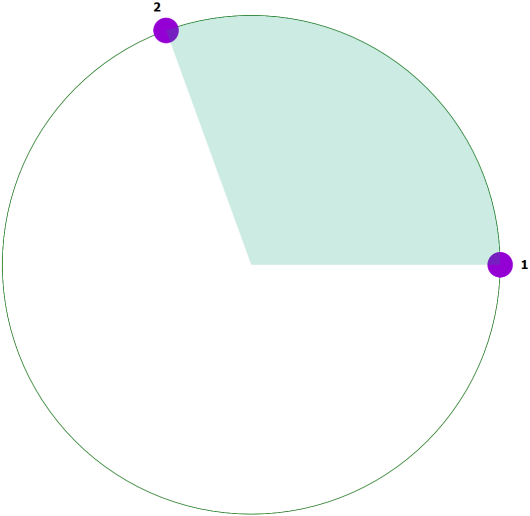
Phyllotaxis



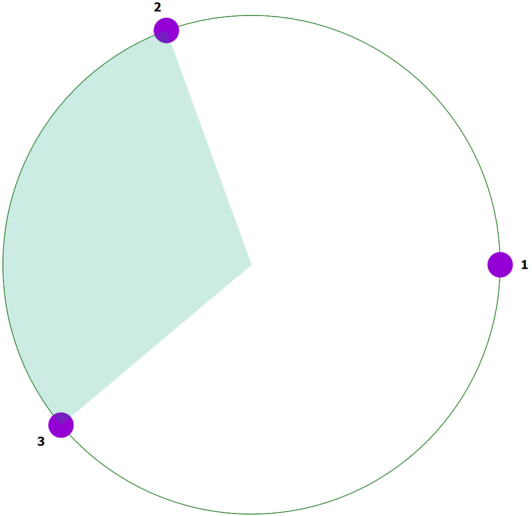
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 110°



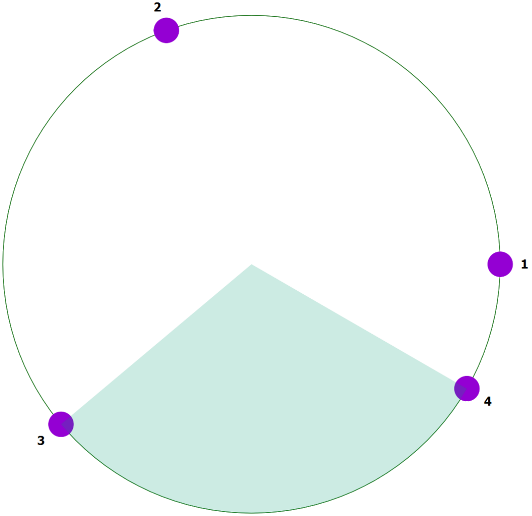
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 110°



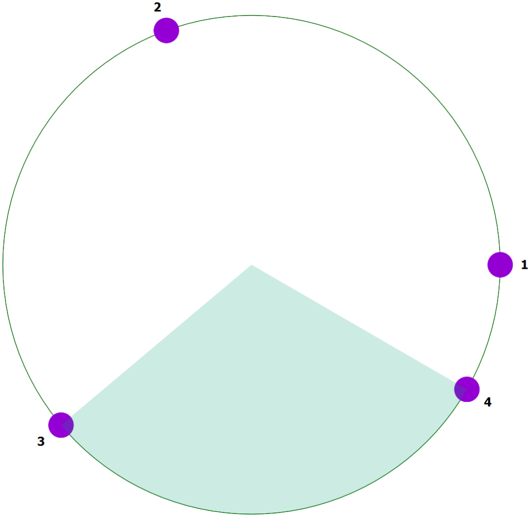
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 110°



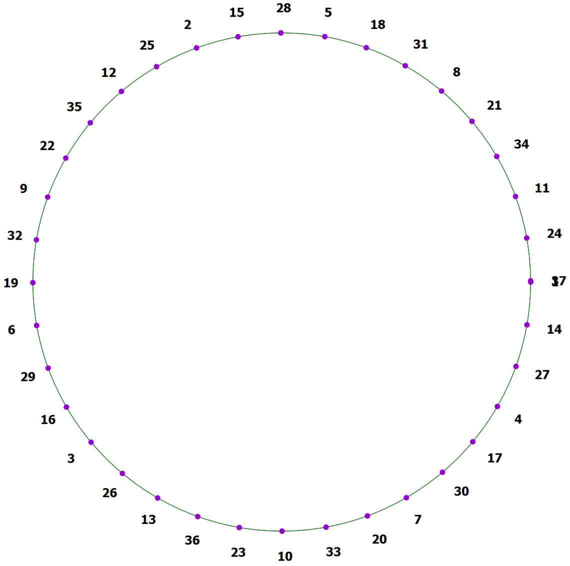
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 110°



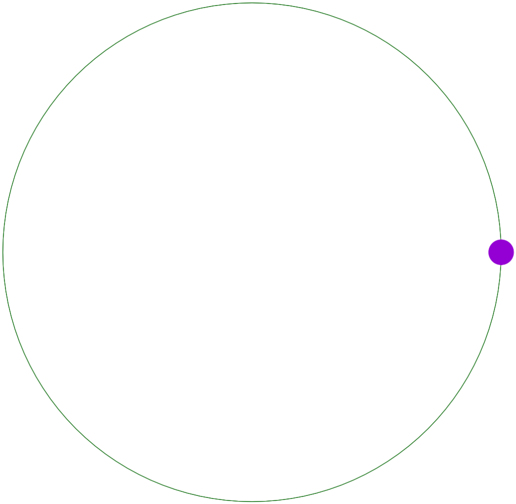
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 110°



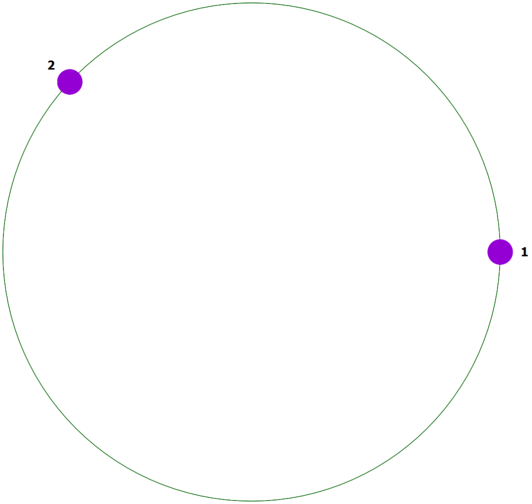
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 110°



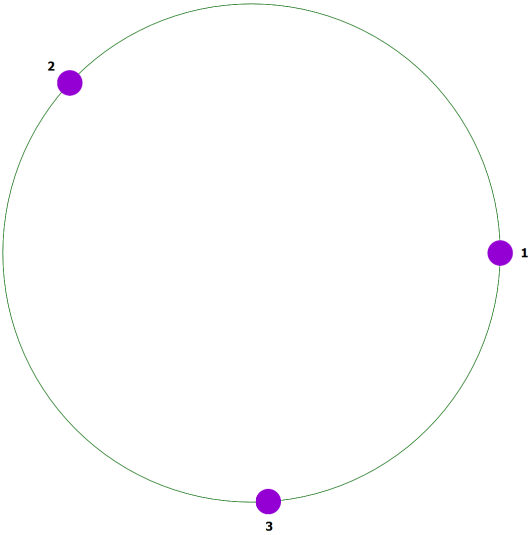
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 137°



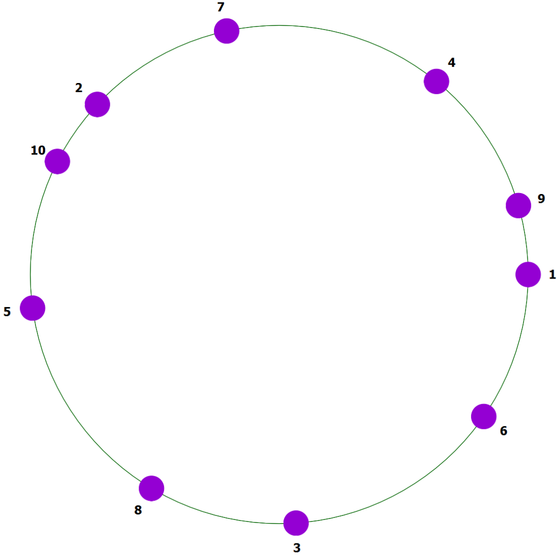
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 137°



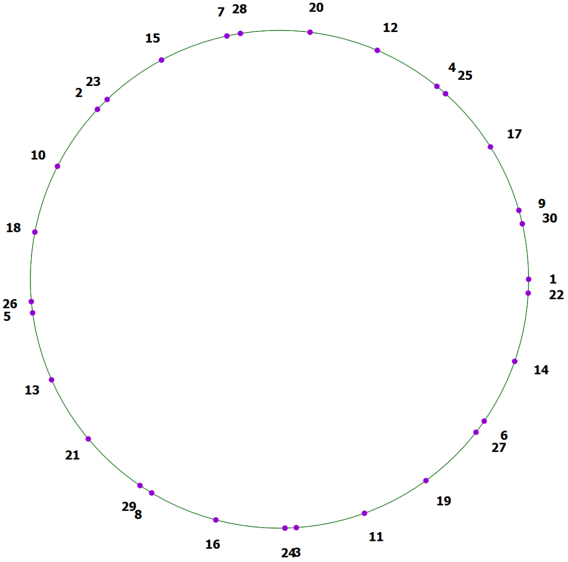
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 137°



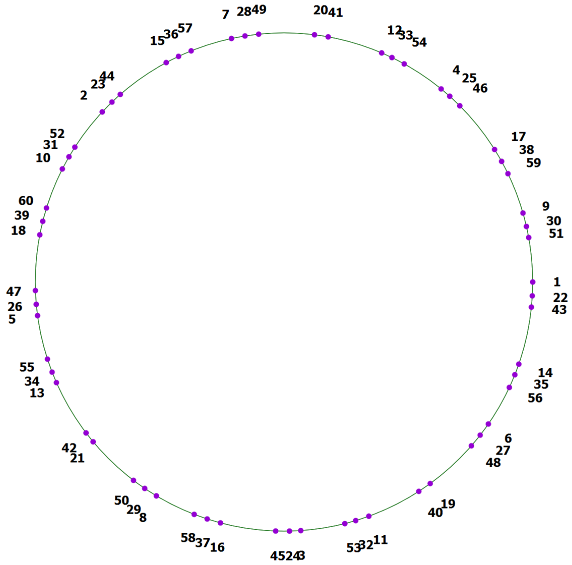
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 137°



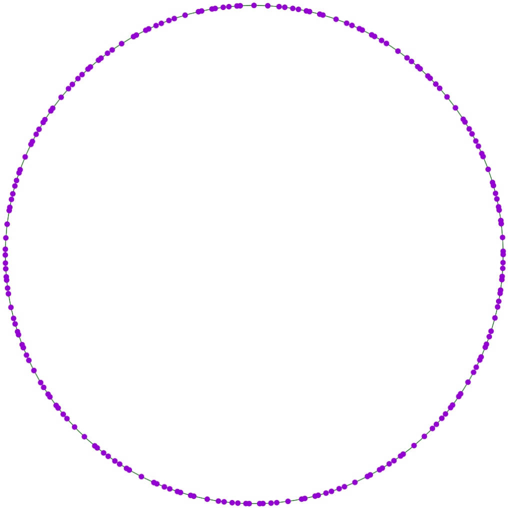
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 137°



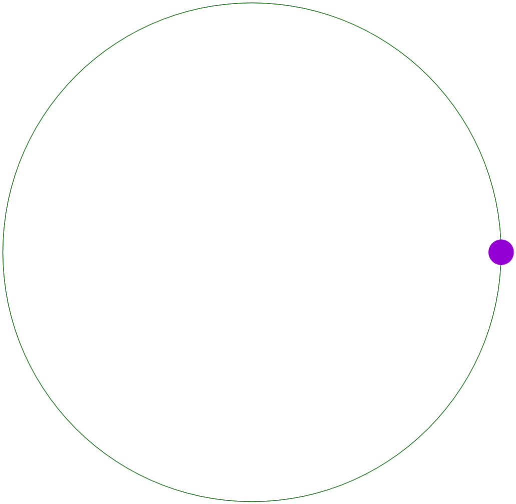
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 137°



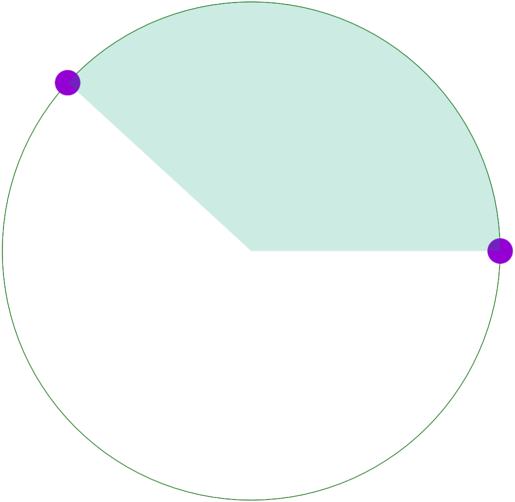
Phyllotaxis – Divergenzwinkel 137°



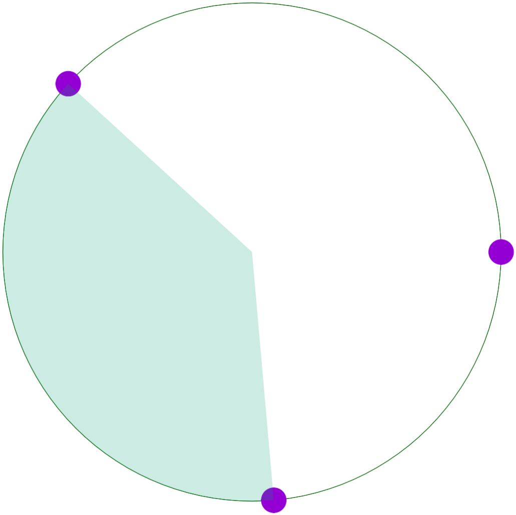
Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ



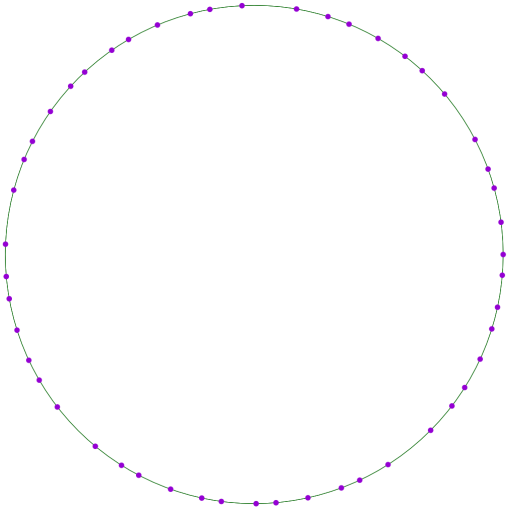
Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ



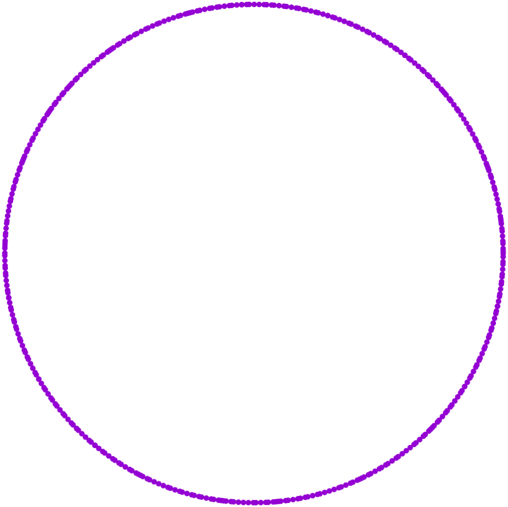
Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ



Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ



Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ



Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

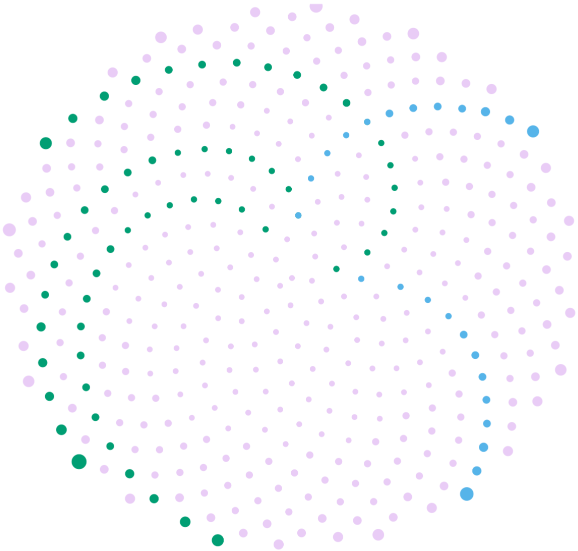
Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum



Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum

Phyllotaxis – Divergenzwinkel ϕ mit Radialwachstum